Stochastische Simulationen mit TinkerPlots – Von einfachen Zufallsexperimenten zum informellen Hypothesentesten

Rolf Biehler, Daniel Frischemeier & Susanne Podworny, Paderborn

Zusammenfassung: *Die Software TinkerPlots ist eine dynamische Datenanalyse- und Simulationssoftware, die im Mathematikunterricht für den Einsatz in den Klassenstufen 3 bis 10 vorgesehen ist. Mit ihrer einfach zu benutzenden Zufallsmaschine bietet sie ein anschauliches Werkzeug zum Modellieren und Simulieren von stochastischen Zufallsexperimenten. In diesem Artikel soll das Potential der Zufallsmaschine exemplarisch anhand einiger Beispiele entlang der einzelnen Klassenstufen gipfelnd in der Hinführung zu Grundgedanken des Hypothesentestens (am Beispiel des „Hörtests") am Ende der Jahrgangsstufe 10 vorgestellt werden.*

1 Einleitung

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist neben der Datenanalyse und der beurteilenden Statistik ein elementarer Teil des Stochastikunterrichts der Sekundarstufen I und II. Sie gewinnt im Laufe der Schuljahre zunehmend an Umfang (Kaun 2006). Eine Erklärung dafür kann sein, dass die Modellierung, das Konstruieren des Ergebnisraums sowie das Berechnen günstiger bzw. möglicher Fälle eine hohe Herausforderung u. a. an die kombinatorischen Fähigkeiten der Lernenden stellt. Mit Hilfe von computergestützten Simulationen können für Schülerinnen und Schüler interessante Aufgaben zugänglich gemacht werden, die zu diesem Zeitpunkt (noch) nicht mit Mitteln der Schulmathematik behandelt werden können. Zusätzlich können verschiedene Inhalte von Stochastikunterricht (frequentistische Interpretation des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, Durchführen ein- und mehrstufiger Zufallsexperimente, informelles Hypothesentesten) vertieft und somit stärker durchdrungen werden (detaillierter nachzulesen in Biehler & Maxara 2007). Um den Hintergrund von Simulationen verstehen und die Ergebnisse von Simulationen korrekt deuten zu können, sollte frühzeitig im Unterricht das empirische Gesetz der großen Zahlen sowie das $1/\sqrt{n}$-Gesetz (zumindest in Form von „Faustformeln") thematisiert werden (ebenda). Im Falle eines einfachen Bernoulli-Experiments mit der Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0{,}5$ (z. B. Werfen einer fairen Münze) hat man beispielsweise die in Tab. 1 angegebenen Faustformeln für die zu erwartende relative Häufigkeit in Abhängigkeit von der Wiederholungsanzahl n mit einer Sicherheit von 95 %. Führt man den Münzwurf beispielsweise 1000 Mal durch, so liegt die relative Häufigkeit für Wappen mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % im Intervall [0,47; 0,53] (95 %-Prognoseintervall). Umgekehrt erhält man für einen Versuch mit 1000 Wiederholungen, bei dem als relative Häufigkeit 0,4 aufgetreten ist, das 95 %-Konfidenzintervall [0,37; 0,43] für die unbekannte Wahrscheinlichkeit p (vgl. Biehler, Hofmann, Maxara und Prömmel 2011, S. 50).

Wiederholungsanzahl n	Abweichung von relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten in Prozentpunkten
50	± 14 %
100	± 10 %
1000	± 3 %
5000	± 1,5 %
10000	± 1 %

Tab. 1: Faustformeln zur Genauigkeit von Simulationen: Radius des 95 %-Prognose- und des 95 %-Konfidenzintervalls in Abhängigkeit von der Wiederholungszahl *n*

Diese Faustformeln können den Lernenden an die Hand gegeben werden. Erstens sollen sie dazu dienen, die Genauigkeit der Simulationen einzuschätzen und zweitens den Lernenden bewusst nahelegen, auf eine genügend große Wiederholungsanzahl zu achten[1].

Unterrichtsvorschläge zu Simulationen werden oft mittels eines Tabellenkalkulationsprogramms (wie Excel), GeoGebra oder CAS realisiert. Dabei überwiegt häufig die technische Komponente, da die jeweiligen Programme ein hohes Maß an Formelkenntnis erfordern. Während sich ohne Simulation das Problem der „Verschleierung" des mathematischen Phänomens aufgrund der Kombinatorik stellt, kann bei Simulationen ein anderes Problem auftreten: Verschleierung des Phänomens durch Technik, bzw. eine zu spezifische Formel- oder Programmiersprache, die in der jeweiligen Software notwendig ist, um das Modell aufzustellen, die Simulation durchzuführen und/oder die Simulation auszuwerten. Die Software TinkerPlots (Konold & Miller 2011) mit ihrer integrierten Zufallsmaschine bietet eine Modellierung von Zufallsexperimenten fast ohne Formeln und

Programmierkenntnisse an und visualisiert darüber hinaus den Simulationsprozess. So können Lernende mit TinkerPlots die Simulationen selbst modellieren und erstellen. Dabei kann die Bedienung der Software häufig sehr intuitiv erfolgen, denn TinkerPlots stellt bei der Modellierung von Zufallsexperimenten keine „Blackbox“ dar, wenn man einmal von der Erzeugung von Zufallszahlen absieht.

2 Die Software TinkerPlots und ihre Zufallsmaschine

Die Software TinkerPlots wurde in den USA für den Mathematikunterricht in den Klassen 3–10 entwickelt und bietet mit der Zufallsmaschine ein mächtiges Tool zum Simulieren von Zufallsexperimenten. Möglichkeiten für den Einsatz in der Schule werden in Biehler (2007) und Biehler et al. (2013) beschrieben. Einsatzmöglichkeiten der Software im Rahmen der Lehreraus- und -fortbildung können in Frischemeier & Podworny (2014) nachgelesen werden. Die Autoren dieses Artikels haben eine noch unveröffentlichte deutsche Version erstellt, mit der bereits mehrere Unterrichtsversuche an Schule und Hochschule durchgeführt wurden. Eine Besonderheit gegenüber anderer Software wie z. B. Fathom (Biehler et al. 2006) oder Tabellenkalkulationsprogrammen wie Excel ist, dass in TinkerPlots praktisch keine Formeln oder Programmierkenntnisse beim Durchführen einer Simulation (weder in der Modellierung, noch in der Durchführung oder Auswertung) von Nöten sind. Ein stochastisches Modell, das mental mit Urnen, Boxen oder Glücksrädern formuliert wurde, kann quasi direkt in die Zufallsmaschine übertragen werden, wodurch TinkerPlots zum expressiven Medium wird. Wir stellen die wichtigste („Simulations-“) Komponente der Software, die oben bereits erwähnte Zufallsmaschine, kurz vor: Per Drag & Drop lässt sich die Zufallsmaschine einfach in die Arbeitsfläche der Software ziehen. Mit den verschiedenen Bauteilen (Box, Stapel, Kreisel, Balken, Kurve und Zähler) lassen sich sehr viele Zufallsexperimente direkt realisieren. In der Grundeinstellung ist die Box als Urne mit drei Kugeln gegeben (Abb. 1). Die Box repräsentiert die Ziehung aus einer Urne. Es können Kugeln in beliebiger Anzahl hineingelegt, individuell beschriftet und die Ziehung mit oder ohne Zurücklegen durchgeführt werden. Außerdem können Einstellungen wie die Anzahl der Wiederholungen pro Simulationsdurchlauf (Durchgänge, max. 100.000) und die Anzahl der Ziehungen (Ziehungen pro Durchgang, max. 100) vorgenommen werden. Die Ziehung selbst wird in TinkerPlots visualisiert als Durcheinanderwirbeln der Kugeln bis schließlich eine oben unter den Merkmalsnamen platziert wird. Die Ergebnisse der Simulation werden automatisch in einer Tabelle dokumentiert. Die Geschwindigkeit der Ziehungen kann per Regler variiert werden. Besonders die Einstellung einer langsamen oder mittleren Geschwindigkeit ermöglicht es dem Lernenden, die Prozesse bei der Ziehung nachzuvollziehen.

Abb. 1: Die Zufallsmaschine von TinkerPlots in der Grundeinstellung

Schauen wir uns dieses am bekannten Beispiel des doppelten Würfelwurfs unter der folgenden Fragestellung an: *„Jemand bietet Dir ein Würfelspiel an. Dazu sollen zwei Würfel gleichzeitig geworfen und die Augensumme gezählt werden. Du darfst Dir vorher aussuchen, ob Du mit den Augensummen 5, 6, 7, 8 (Ereignis A) oder mit allen übrigen Augensummen (Ereignis B) gewinnen möchtest. Begründe, ob Du eine der beiden Gewinnmöglichkeiten bevorzugen würdest.“* (Müller, 2005). Selbst wenn man mit einfachen kombinatorischen Überlegungen zu einer Entscheidung kommt, so gibt es im Unterricht oft mindestens zwei Argumentationslager, eines davon hält die beiden Würfel für nicht unterscheidbar. Eine Simulation kann zu einer Entscheidung über konkurrierende Modelle beitragen. Wir zeigen, wie diese Simulation in TinkerPlots zu realisieren ist. Dazu bilden wir den doppelten Würfelwurf als Urnenziehung ab. Sechs Kugeln, beschriftet mit den Zahlen von „1“ bis „6“, liegen in einer Box[2] (siehe Abb. 2, links) und es wird je Durchgang zweimal aus der Box mit Zurücklegen gezogen. Insgesamt führen wir 10000 Durchgänge aus. TinkerPlots dokumentiert automatisch die Ergebnisse für jeden Durchgang zeilenweise in einer Tabelle (Abb. 2, mittig). Mit einem vordefinierten Befehl („Summe in ‚Gesamt‘“) ermittelt die Software zeilenweise die Zufallsgröße

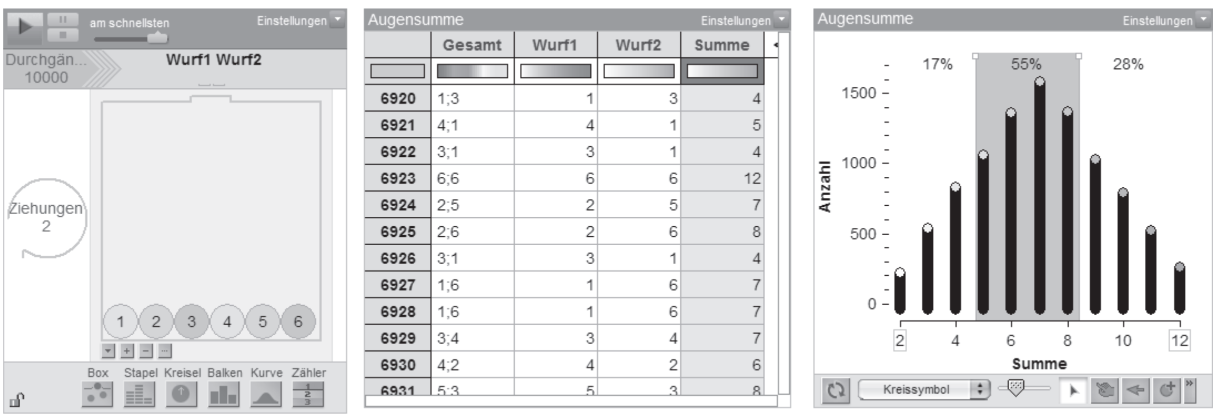
„Augensumme“ (Abb. 2, mittig, rechte Spalte in der Tabelle). Mithilfe eines Graphen (Abb. 2, rechts) kann die Verteilung der Zufallsgröße „Summe“ z. B. in Form eines Säulendiagramms dargestellt werden. Sogenannte „Einteiler“ (grau hinterlegter Bereich in Abb. 2, rechts) ermöglichen die freie Auswahl eines Intervalls einer Verteilung und die Ermittlung der Anzahlen und Anteile der Fälle in diesem Intervall, hier eine relative Häufigkeit für das Ereignis *A* von ca. 55 %. Da die Simulation sehr häufig (mehr als 1000 Durchgänge) durchgeführt wurde, können wir anhand der relativen Häufigkeiten zu den einzelnen Ausprägungen der Zufallsgröße „Summe“ die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „*A*“ auf 55 % und die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses „*B*“ auf 45 % schätzen. Somit ist es günstiger, auf das Ereignis *A* zu setzen. Schülerinnen und Schüler könnten sich kritisch fragen, wie genau die relative Häufigkeit von 55 % die gesuchte Wahrscheinlichkeit schätzt. Durch mehrfaches Wiederholen von 10000 Durchgängen bekommt man ein Gefühl für die Schwankung. Es erscheint relativ sicher, dass die Wahrscheinlichkeit über 50 % liegt. Um die Notwendigkeit größerer Durchgangszahlen zu motivieren, kann man auch erstmal 50 Durchgänge machen, um zu erleben, wie unsicher die Beurteilung auf dieser Basis ist. Hat man den Lernenden Faustregeln zur Genauigkeit von Simulationen an die Hand gegeben, (bei 10000 Durchgängen ist die Genauigkeit nach den Faustformeln ± 1 Prozentpunkt (mit 95 % Sicherheit)), so kann man auch hieraus schließen, dass *A* günstiger ist als *B*.

3 Beispiele

Wir betrachten nun zwei weiterführende Beispiele: das Augensummenproblem beim dreifachen Würfelwurf nach de Méré aus den Anfangszeiten der Wahrscheinlichkeitsrechnung sowie den Hörtest als Einstieg in das informelle Hypothesentesten.

3.1 Dreifacher Würfelwurf: De Méré

Hat man das oben formulierte Einstiegsproblem gelöst, so kann man nun beispielsweise mit dem dreifachen Würfelwurf fortfahren. Während das Einstiegsproblem noch relativ elementar anhand der Berechnung der Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse „*A*“ und „*B*“ (ohne große kombinatorische Fähigkeiten) lösbar ist, wird das beim dreifachen Würfelwurf aufgrund der sechs Mal so großen Ergebnismenge schon erheblich schwieriger. Ein bekanntes historisches Problem von Chevalier de Méré ist, ob beim dreifachen Würfelwurf das Auftreten der Augensumme 11 wahrscheinlicher als das Auftreten der Augensumme 12 ist, obwohl es scheinbar gleich viele Kombinationsmöglichkeiten für beide Augensummen gibt[3]. Diese Frage lässt sich mit etwas Vorbereitung ab Klasse sechs behandeln. Es können erste Vorüberlegungen zu Kombinationsmöglichkeiten von drei Würfeln auf die entsprechenden Augensummen im Unterricht gemeinsam thematisiert werden. Dabei kann die Reihenfolge der einzelnen Würfelergebnisse von Schülern entweder als relevant oder als irrelevant eingeschätzt werden und somit Auslöser einer Diskussion sein. Diese Diskussion kann, nachdem im Unterricht das Zufallsexperiment auch händisch durchgeführt wurde, Anlass für die Beantwortung des Problems mithilfe einer Simulation in TinkerPlots sein. Der Würfelwurf lässt sich wieder durch sechs Kugeln (beschriftet mit „1“ bis „6“) in der Box (siehe Abb. 3, links) realisieren. Es sind drei Ziehungen pro Durchgang zur Modellierung des dreifachen Werfens nötig und für eine möglichst hohe Genauigkeit (Abweichungen nach den Faustformeln ≤ 1 %) werden 10000 Durchgänge durchgeführt. In der Tabelle muss nun wieder das Merkmal „Summe“ erstellt werden, das die Ergebnisse der drei Ziehungen aufsummiert. Dies kann einfach durch ein vordefiniertes Merkmal geschehen, das per Klick in der Tabelle realisiert wird.



	Gesamt	Wurf1	Wurf2	Summe
6920	1;3	1	3	4
6921	4;1	4	1	5
6922	3;1	3	1	4
6923	6;6	6	6	12
6924	2;5	2	5	7
6925	2;6	2	6	8
6926	3;1	3	1	4
6927	1;6	1	6	7
6928	1;6	1	6	7
6929	3;4	3	4	7
6930	4;2	4	2	6
6931	5;3	5	3	8

Abb. 2: Das Zufallsexperiment „Augensumme“ in TinkerPlots

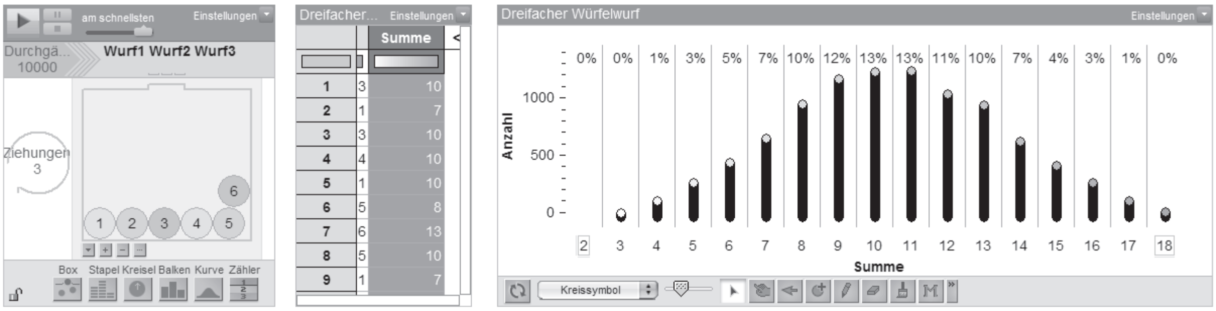


Abb. 3: Das Problem von de Méré – Der dreifache Würfelwurf in TinkerPlots

Die Augensumme wird für jeden Durchgang in der entsprechenden Spalte der Tabelle automatisch dargestellt (siehe Abb. 3, mittig). Mit dem Graph-Objekt in TinkerPlots kann die Verteilung dieses Merkmals „Summe" dargestellt werden (Abb. 3, rechts). Es ist zu sehen, dass die relative Häufigkeit für die Augensumme 11 größer ist als für die Augensumme 12 und daraufhin lässt sich schätzen, dass die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Augensumme = 11" ca. 13 % und für das Ereignis „Augensumme = 12" ca. 11 % beträgt. Man kann auch zunächst mit kleineren Durchgangsanzahlen beginnen und beobachten, dass keine klare Entscheidung für 11 oder 12 möglich ist. Anschließend wird die Durchgangszahl solange erhöht, bis man einigermaßen wiederholungsstabile Unterschiede in den relativen Häufigkeiten erhält. Im Unterricht könnte man als Grund für die Schwierigkeiten einer klaren Entscheidungsfindung die leicht unterschiedlichen Anzahlen für die jeweils günstigen Ergebnisse ausmachen und dieses Phänomen differenzierter anhand der einzelnen Kombinationsmöglichkeiten begründen.

3.2 Eine Hinführung zum informellen Hypothesentesten: Der Hörtest

Wir wollen abschließend aufzeigen, wie man auch die Wahrscheinlichkeitsverteilung binomialverteilter Zufallsgrößen mithilfe von Simulationen mit TinkerPlots untersuchen kann (vgl. Biehler, Frischemeier & Podworny 2015) – eine Hinführung zum Hypothesentesten, die durch den simulativen Zugang bereits vor der Sekundarstufe II zugänglich gemacht werden kann (vgl. Riemer 2009).

Ein Beispiel ist in diesem Fall der Hörtest (diese Aufgabe existiert in diversen Variationen): *Ein privater Hörfunksender hat zum „Tag des offenen Studios" folgendes Spiel geplant. Als Studiogast bekommt man im Tonstudio über Raumboxen 12 Musikstücke eingespielt. Jedes Musikstück wird in einer der zwei Tonqualitäten MP3-128 oder CD vorgespielt, welche es allerdings ist, das entscheidet der Moderator. Aufgabe ist es, die Klangqualität eines jeden eingespielten Musikstücks zu erkennen. Tom, ein Studiogast, errät 10 von 12 Tonqualitäten korrekt. Die Aufgabe für die Lernenden ist nun zu beurteilen, ob Tom besondere Hörfertigkeiten hat oder ob er nur geraten hat.* Aufgaben dieser Art lassen sich etwa ab Klasse 8 experimentell und simulativ realisieren (Schäfer 2008). Im Unterricht kann zu Beginn ein Experiment gestartet werden, bei dem alle Schülerinnen und Schüler Musikqualitäten raten.[4] Nach der Simulation können die „Hörfähigkeiten" von Tom diskutiert werden, wobei das so genannte P-Wert Konzept (s. u.) intuitiv genutzt wird, ohne dass es zuvor ausführlich behandelt werden müsste.

Das Zufallsexperiment kann mit TinkerPlots wie folgt simuliert werden: Wir gehen davon aus, dass der Studiogast rät, also keine besonderen Hörfertigkeiten besitzt. Es gibt beim Raten der Musikstücke zwei Möglichkeiten: entweder die Person rät richtig oder falsch. Da es insgesamt 12 Musikstücke sind, die vorgespielt werden, läuft das Zufallsexperiment darauf hinaus, zwölfmal zufällig zwischen „richtig" und „falsch" auszuwählen. In TinkerPlots lässt sich dies beispielsweise durch eine Ziehung von zwei Kugeln aus einer Box oder aber (siehe Abb. 4, links) mit dem Bauteil Kreisel mit zwei gleichgroßen Sektoren (beschriftet mit „richtig" und „falsch") modellieren. Um wiederum möglichst genaue Ergebnisse zu erhalten, lassen wir die Zufallsmaschine 10000 mal laufen, das entspricht 10000 Personen, die am Ratespiel teilnehmen. Die Ergebnisse der 10000 Personen werden automatisch in der Tabelle protokolliert, uns interessiert nun, wie häufig jeder einzelne die „richtige" Tonqualität geraten hat. Dafür kann wieder ein vordefiniertes Ergebnismerkmal verwendet werden: Tabelle → Einstellungen → Ergebnismerkmale → ‚?' in Gesamt zählen → „richtig". In der neu erstellten Spalte „Anzahl_richtig" wird nun protokolliert, wie häufig jeweils richtig geraten wurde. Im Graphen (Abb. 4, unten mittig) lässt sich erkennen, dass von 10000 Personen gerade einmal 195 Personen (ca. 2 %) ein ebenso gutes oder noch besseres Ergebnis als Tom durch reines Raten erreicht haben. Diese

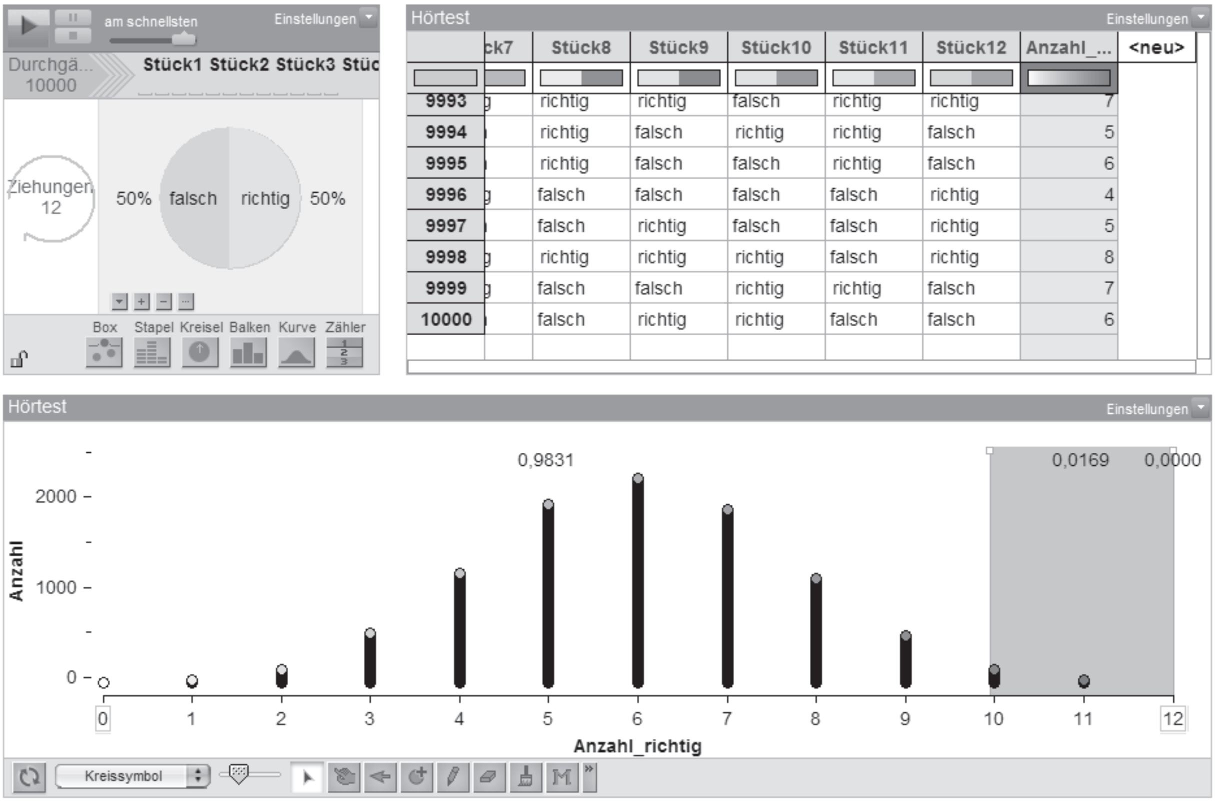


Abb. 4: Der Hörtest in TinkerPlots

„Überschreitungswahrscheinlichkeit“ nennt man in der Statistik den P-Wert der Ergebnisse von Tom. Wenn Tom nur geraten hätte, wäre etwas Unwahrscheinliches passiert, also sprechen die Daten dafür, dass Tom besser ist als Raten. An das Ergebnis der Simulation kann nun eine weiterführende Diskussion anschließen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit schafft man ein gleich gutes oder noch besseres Ergebnis als Tom? Hat dieser einfach nur glücklich geraten? Hat er besondere Hörfähigkeiten? Das formale P-Wert Konzept könnte später in der Oberstufe als zusätzliche Bewertungsgrundlage eingeführt werden. Bei einem P-Wert zwischen 1 % und 5 % spricht man in der statistischen Praxis von einer mittleren Evidenz gegen die Hypothese des reinen Ratens.

4 Schlussbemerkung

Dieser Artikel soll exemplarisch einige Anregungen für den Einsatz der Software TinkerPlots im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I geben. Dabei kann TinkerPlots sowohl als Demonstrationsmedium des Lehrers als auch als Medium zur eigenständigen Arbeit der Schülerinnen und Schüler eingesetzt werden. Im Rahmen einer Bachelorarbeit (Reichert 2014) haben wir eine Unterrichtsreihe zu Simulationen mit TinkerPlots für eine neunte Klasse an einer Realschule entwickelt, durchgeführt und evaluiert. Die Evaluation hat unter anderem gezeigt, dass interessante stochastische Fragestellungen (bis hin zum oben beschriebenen Hörtest) mit Unterstützung der Software TinkerPlots bereits in einer neunten Klasse einer Realschule (ohne besondere Vorkenntnisse) thematisiert werden können, wobei aber besonders auf eine sorgfältige Klärung des Verhältnisses von relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten zu achten ist. Auch in der Aus- und Fortbildung für angehende Grund-, Haupt-, Real- und Gesamtschullehrer an der Universität Paderborn haben wir mit dem oben beschriebenen Konzept gute Erfahrungen gemacht. Als weitere Unterstützungsmaßnahme haben wir einen Simulationsplan[5] entwickelt, der sowohl zur Vorbereitung einer Simulation, als auch als Strukturierungshilfe während einer Simulation verwendet werden kann. Außerdem ist er eine hilfreiche Offline-Dokumentation für die spätere Besprechung der Simulationen im Unterricht (Podworny 2013).

Zu den angegebenen drei Simulationen können Beispieldateien auf der Homepage der Zeitschrift „Stochastik in der Schule“ heruntergeladen werden.

Anmerkungen

1 Siehe Biehler & Prömmel (2013) für eine stufenweise Hinführung zum $1/\sqrt{n}$-Gesetz zur Thematisierung der Genauigkeit von Simulationen, solange mit Mitteln der Schulmathematik der Themenbereich Konfidenzintervalle noch nicht erschlossen ist (vgl. auch Maxara 2009, S. 21 f.).

2 Äquivalent zu dieser Simulation können auch andere Bauteile (z. B. der Kreisel mit sechs gleichgroßen Sektoren) verwendet werden.

3 Bei diesem Ansatz wird außer Acht gelassen, dass die jeweiligen Augensummen durch eine unterschiedliche Anzahl an Permutationen der Würfelkombinationen erzeugt werden können.

4 Geeignetes Material lässt sich leicht selbst erstellen oder findet sich z. B. unter http://www.riemer-koeln.de (abgerufen am 04.03.2015).

5 Dieser kann unter http://fddm.uni-paderborn.de/personen/podworny-susanne/material/ heruntergeladen werden.

Software

Konold, C. & Miller, C. (2011): TinkerPlots 2.0. Emeryville, CA: Key Curriculum Press, deutsche Adaption (unveröffentlicht): Biehler, R.; Frischemeier, D.; Podworny, S., siehe http://lama.uni-paderborn.de/personen/rolf-biehler/projekte/tinkerplots.html).

Literatur

Biehler, R. (2007): TINKERPLOTS: Eine Software zur Förderung der Datenkompetenz in Primar- und früher Sekundarstufe. *Stochastik in der Schule* 27(3), S. 34–42.

Biehler, R., Ben-Zvi, D., Bakker, A. & Makar, K. (2013): Technology for Enhancing Statistical Reasoning at the School Level. In: Clements, K.; Bishop, A.; Keitel, C.; Kilpatrick, J. & Leung, F. (Hrsg.). Third International Handbook of Mathematics Education. New York: Springer 2013, S. 643–689.

Biehler, R, Frischemeier, D. & Podworny, S. (2015): Informelles Hypothesentesten mit Simulationsunterstützung in der Sekundarstufe I. *Praxis der Mathematik in der Schule* 66(6), S. 21–25.

Biehler, R., Hofmann, T., Maxara, C. & Prömmel, A. (2006): Fathom 2: Eine Einführung. Berlin [u. a.]: Springer.

Biehler, R., Hofmann, T., Maxara, C. & Prömmel, A. (2011): Daten und Zufall mit Fathom. Unterrichtsideen für die SI mit Software-Einführung. Braunschweig: Schroedel.

Biehler, R. & Maxara, C. (2007): Integration von stochastischer Simulation in den Stochastikunterricht mit Hilfe von Werkzeugsoftware. *Der Mathematikunterricht* 53(3), S. 46–62.

Biehler, R. & Prömmel, A. (2013). Von ersten stochastischen Erfahrungen mit großen Zahlen bis zum $1/\sqrt{n}$-Gesetz – ein didaktisch orientiertes Stufenkonzept. *Stochastik in der Schule* 33(2), 14–25.

Frischemeier, D. & Podworny, S. (2014): Explorative Datenanalyse und stochastische Simulationen mit TinkerPlots – erste Einsätze in Kassel & Paderborn. In: Wassong, T.; Frischemeier, D.; Fischer, P. R.; Hochmuth, R.; Bender, P. (Hrsg.): Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen – Using Tools for Learning Mathematics and Statistics. Wiesbaden: Springer Spektrum, S. 337–348.

Kaun, A. (2006): Stochastik in deutschen Lehrplänen allgemeinbildender Schulen. In: *Stochastik in der Schule* 26(3), S. 11–17.

Maxara, C. (2009). Stochastische Simulation von Zufallsexperimenten mit Fathom – Eine theoretische Werkzeuganalyse und explorative Fallstudie. Kasseler Online-Schriften zur Didaktik der Stochastik (KaDiSto) Bd. 7. Universität Kassel [Online: http://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hebis:34-2006110215452].

Müller, J. H. (2005): Die Wahrscheinlichkeit von Augensummen – Stochastische Vorstellungen und stochastische Modellbildung. In: *Praxis der Mathematik in der Schule* 47(4), S. 17–22.

Podworny, S. (2013): Mit TinkerPlots vom einfachen Simulieren zum informellen Hypothesentesten. In: Greefrath, G.; Käpnick, F. & Stein, M. (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013*, Münster: WTM Verlag, S. 324–327.

Reichert, Simon (2014): Design, Durchführung und (beispielhafte) Auswertung einer Unterrichtsreihe zur Einführung in die computergestützte Simulation von Zufallsexperimenten mit TinkerPlots in der Sekundarstufe I. Unveröffentlichte Bachelorarbeit. Paderborn: Universität Paderborn.

Riemer, W. (2009): Soundcheck: CD contra MP3. Ein Hörtest als Einstieg in die Stochastik. *Mathematik lehren* 153, S. 21–23.

Schäfer, T. (2008). Von den Anfängen bis zum Hörtest – Konzeption und Evaluation eines Unterrichtsexperiments zur Stochastik in Klasse 8. Unveröffentlichte Staatsexamensarbeit. Universität Kassel.

Anschrift der Verfasser

Rolf Biehler
Institut für Mathematik
Universität Paderborn
Warburger Straße 100
33098 Paderborn
biehler@math.upb.de

Daniel Frischemeier
Institut für Mathematik
Universität Paderborn
Warburger Straße 100
33098 Paderborn
dafr@math.upb.de

Susanne Podworny
Universität Paderborn
Institut für Mathematik
Warburger Straße 100
33098 Paderborn
Podworny@math.upb.de